关于错排问题的思考与讨论

江苏省苏州第十中学

高三（10）

钱炘祺 于浩佳

指导老师：吉剑锋

摘要：我们在对一道课堂习题深入挖掘的过程中引出了著名的数学问题----错排问题。这个问题已经有许多数学家做过研究，但我们用自己的方法求出了递推式，并最终以不同于欧拉的方式得出了与其相同的结果。

关键词：排列组合，分类计数原理和分步计数原理，麦克劳林公式，联想，取整

Abstract： In a math class, we studied a problem of receiving postcards of others: there are 4 different people in one dorm. Each of them writes a postcard. After gathering all the postcards, each of them choose one card from other people. And the question is how many kinds of choosing ways do they have?

We easily find the answer, even using two different ways to solve it. But not satisfied in the case of 4 people, we extend the problem to the case of n people, and find our own method of solution: recurrence. But as we do more research on it, we find that this problem is one of the most famous 100 math problems: the problem of derangements. So, we do some concluding. But after scanning all of the solutions we conclude, we find that none of them give a simplified answer. Considering this, we put the point of research on the simplification of the answer. In the end, we find we can use the bracket function to solve the problem.

目录

一．引入……………………………………………………………………………………4
二．直接用容斥原理求出答案…………………………………………………………5
三．求出这一数列的递推式……………………………………………………………6
四．由递推式求出通项公式……………………………………………………………7
（一）方法一……………………………………………………………………………7
（二）方法二……………………………………………………………………………8
（三）用数学归纳法证明通项公式……………………………………………………9
五．通过麦克劳林公式简化通项公式…………………………………………………11
六．我们对欧拉对这一问题的研究的理解……………………………………………14
七．推广……………………………………………………………………………………18
参考文献……………………………………………………………………………………20

一．引入：

有一道练习题是这样的：同室 4 人各写 1 张贺年卡，先集中起来，然后每人从中各拿 1 张别人送出的贺年卡，求 4 张贺年卡不同的分配方式的数目。

这便是有名的“错排问题”，该问题可以抽象成有 1，2，3，4 这 4 个数，在重新排列后，每个数都不在原来的位置。

对于 4 个数字，可以采用枚举的方法。列表如下：

1	2	3	4

2	1	4	3
2	3	4	1
2	4	1	3
3	1	4	2
3	4	1	2
3	4	2	1
4	1	2	3
4	3	1	2
4	3	2	1

通过枚举，我们可以直接地得到“有 9 种方法”的答案。

这个问题本身并不复杂，但是如果把 4 个数推广到 n 个数呢？

即如何求一列有序排列的数：1，2，3……n-1，n，将其打乱重排，每个数都不在原来位置的方法数。

对于此类题目，容斥原理是我们脑海中的第一反应，于是首先根据容斥原理解出答案。

二．根据容斥原理求出答案：

若不记条件，则打乱重排的方法数为 $N = n! = A_n^n$

减去有一个元素在原来位置的方法数为 $m_1 = A_n^1(n-1)! = A_n^{n-1}$

但此时没有考虑有两个元素在原来位置的情况，所以多减了一部分，应再加上两个元素在原来位置的情况数 $m_2 = C_n^2(n-2)! = A_n^{n-2}$

同样在考虑两个元素的时候没有考虑到三个元素，多加了一部分，应再减去三个元素在原来位置的情况数 $m_3 = C_n^3(n-3)! = A_n^{n-3}$

同理，应在加上四个元素在原来位置的情况数 $m_4 = C_n^4(n-4)! = A_n^{n-4}$

以此类推，最后应补上所有元素都在原来位置的情况数 $m_n = C_n^n(n-n)! = A_n^{n-n} = A_n^0$

所以，根据容斥原理，对于 n 个元素，将其打乱顺序，使得每个元素在变换后都不在其原来的位置的方法数为 $N - m_1 + m_2 - m_3 + \ldots + (-1)^n m_n$

即 $A_n^n - A_n^{n-1} + A_n^{n-2} - A_n^{n-3} + \ldots + (-1)^n A_n^0$，$(n \geq 2)$

即 $A_n^{n-2} - A_n^{n-3} + A_n^{n-4} - A_n^{n-5} + \ldots + (-1)^n A_n^0$，$(n \geq 2)$

即 $n!\left(\frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$，$(n \geq 2)$

在用容斥原理解题的过程中，我们发现，可以用数列的知识对本题做出解答。于是开始求这一数列的递推式。

三．求出这一数列的递推式：

设对于 n 个数的错排方法数为 a_n

现对第 1 号元素“1”讨论，有两类情况。

第一类：设在变换后“1”与第 m 号元素“m”$(m \neq 1)$ 的位置恰巧对调。由 m 的任意性，此步骤有 n-1 种方法。

此时余下的 $n-2$ 个元素错排，与元素“1”和元素“m”无关，即方法数为 a_{n-2}。

$\therefore$ 该情况方法数为 $m_1 = (n-1)a_{n-2}$

第二类：“1”并未与任何一个元素互换位置。此类情况有两种解法：

解法一：

此时，可看作，把 1 号元素先放到新增的第 n+1 号位置，从“2”到“n”这 n-1 个元素中选取任意一个放到 1 号位置，共 n-1 种不同方法，不妨设拿走的号码记为 k 号（$k \neq 1$）；

从 2 号到 n+1 号位置上共有 n-1 个元素，分别放到 2 号位置到 n 号位置上，其中元素 1 不能放在 k 号位置上，就相当于 n-1 个元素的错排，此步骤方法数为 a_{n-1}

$\therefore$ 该情况方法数为 $m_2 = (n-1)a_{n-1}$

解法二：

先将元素“2”到元素“n”这 n-1 个元素进行这 n-1 个元素内部的错排，则该步骤的方法数为 a_{n-1}。

在错排后的这 n-1 个元素里任意选一个元素，有 n-1 种方法。

不妨设选的是第 k 号位置的元素“m”，则 $k \neq m \neq 1$。此时，将“1”与“m”互换位置，则在 1 号位置上的是元素“m”，而在第 m 号位置上的却不是元素“1”，因为元素“1”在第 k 号位置上且 $k \neq m \neq 1$，这样就实现了““1’并未与任何一个元素互换位置”的条件，且不重复不遗漏。

$\therefore$ 该情况方法数为 $m_2 = a_{n-1}(n-1)$

综合上述两类情况，可得递推式 $a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$

在得到递推式后，开始对通项公式的求解。

四．由递推式求出通项公式：

该数列中，易得$a_1=0$，$a_2=1$，$a_3=2$，$a_4=9$

∴即已知$a_n=(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2})$，$(n\geq 3)$ 且 $a_1=0$，$a_2=1$，求其通项

$\therefore a_n-na_{n-1}=-[a_{n-1}-(n-1)a_{n-2}]$

设$b_n=a_n-na_{n-1}$

$\therefore b_n=-b_{n-1}$，$b_2=1\neq 0$

$\therefore b_n=(-1)^n$，$(n\geq 2)$

$\therefore a_n-na_{n-1}=(-1)^n$，$(n\geq 2)$

（一）方法一：

$\therefore \frac{a_n}{(-1)^n}+n\frac{a_{n-1}}{(-1)^{n-1}}=1$，$(n\geq 2)$

设$c_n=\frac{a_n}{(-1)^n}$，$(n\geq 1)$

则$c_n=1-nc_{n-1}$，$(n\geq 2)$，$c_1=0$，$c_2=1$，$c_3=-2$

$\therefore c_n=1-nc_{n-1}$

$$
\begin{aligned}
&=1-n[1-(n-1)c_{n-2}]\\
&=1-n+n(n-1)[1-(n-2)c_{n-3}]\\
&=1-n+n(n-1)-n(n-1)(n-2)[1-(n-3)c_{n-4}]
\end{aligned}
$$

……

$$=\begin{matrix}1-n+n(n-1)-n(n-1)(n-2)+\cdots\\+(-1)^{n-3}n(n-1)(n-2)\cdots[n-(n-4)][1-(n-(n-3))c_{n-(n-2)}]\end{matrix}$$

$$=(-1)^0 1+(-1)^1 n+(-1)^2 n(n-1)+\cdots+(-1)^{n-2}n(n-1)(n-2)\cdots*4*3*c_2$$

即$c_n=(-1)^0\frac{n!}{n!}+(-1)^1\frac{n!}{(n-1)!}+(-1)^2\frac{n!}{(n-2)!}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{n!}{2!}$，$(n\geq 2)$

$\therefore a_n=(-1)^n\left[(-1)^0\frac{n!}{n!}+(-1)^1\frac{n!}{(n-1)!}+(-1)^2\frac{n!}{(n-2)!}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{n!}{2!}\right]$，$(n\geq 2)$

即$a_n=(-1)^n\left(A_n^0-A_n^1+A_n^2-\ldots\ldots+(-1)^{n-2}A_n^{n-2}\right)$，$(n\geq 2)$

即 $a_n = A_n^{n-2} - A_n^{n-3} + A_n^{n-4} - A_n^{n-5} + \ldots + \left(-1\right)^n A_n^0$，$(n \geq 2)$

即 $a_n = n!\left(\frac{\left(-1\right)^2}{2!} + \frac{\left(-1\right)^3}{3!} + \frac{\left(-1\right)^4}{4!} + \ldots + \frac{\left(-1\right)^{n-1}}{\left(n-1\right)!} + \frac{\left(-1\right)^n}{n!}\right)$，$(n \geq 2)$

（二）方法二：

$\because a_n - na_{n-1} = \left(-1\right)^n$，$(n \geq 2)$

$\therefore \frac{a_n}{n!} - \frac{a_{n-1}}{\left(n-1\right)!} = \frac{\left(-1\right)^n}{n!}$，$(n \geq 2)$

$\frac{a_{n-1}}{\left(n-1\right)!} - \frac{a_{n-2}}{\left(n-2\right)!} = \frac{\left(-1\right)^{n-1}}{\left(n-1\right)!}$

……

$\frac{a_4}{4!} - \frac{a_3}{3!} = \frac{\left(-1\right)^4}{4!}$

$\frac{a_3}{3!} - \frac{a_2}{2!} = \frac{\left(-1\right)^3}{3!}$

$\therefore \frac{a_n}{n!} - \frac{a_2}{2!} = \frac{\left(-1\right)^n}{n!} + \frac{\left(-1\right)^{n-1}}{\left(n-1\right)!} + \frac{\left(-1\right)^4}{4!} + \frac{\left(-1\right)^3}{3!}$，$(n \geq 2)$

$\therefore a_n = n!\left(\frac{\left(-1\right)^2}{2!} + \frac{\left(-1\right)^3}{3!} + \frac{\left(-1\right)^4}{4!} + \ldots + \frac{\left(-1\right)^{n-1}}{\left(n-1\right)!} + \frac{\left(-1\right)^n}{n!}\right)$，$(n \geq 2)$

在得出通项公式后，为确保结论的严谨性，运用数学归纳法进行证明。

（三）用数学归纳法证明通项公式

已知 $a_n=(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2})$，$(n\geq 2)$ 且 $a_2=1$，$a_3=2$，证明

$$a_n=n!\left(\frac{(-1)^2}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}+\frac{(-1)^4}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}\right),\ (n\geq 2)$$

下用数学归纳法证明该结论：

i 当 $n=2$ 时，$a_2=2!\left(\frac{(-1)^2}{2!}\right)=1$ 成立，

当 $n=3$ 时，$a_3=3!\left(\frac{(-1)^2}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}\right)=2$ 成立；

ii 若 $n\leq k\ (k\geq 3)$ 时，$a_n=n!\left(\frac{(-1)^2}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}+\frac{(-1)^4}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}\right)$ 成立，

即若 $a_k=k!\left(\frac{(-1)^2}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{(-1)^k}{k!}\right)$

且 $a_k=(k-1)!\left(\frac{(-1)^2}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\right)$ 成立

则当 $n=k+1$ 时，由 $a_n=(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2})$，$(n\geq 2)$

$$a_{k+1}=k(a_k+a_{k-1})$$

此时考虑 $\frac{a_{k+1}}{(k+1)!}=\frac{ka_k}{(k+1)!}+\frac{ka_{k-1}}{(k+1)!}$

即 $\frac{a_{k+1}}{(k+1)!}=\frac{k\left(\frac{(-1)^2}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{(-1)^k}{k!}\right)}{(k+1)}+\frac{\left(\frac{(-1)^2}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\right)}{(k+1)}$

即 $\frac{a_{k+1}}{(k+1)!}=\left(\frac{(-1)^2}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\right)+\frac{k(-1)^k}{(k+1)k!}$

即 $\frac{a_{k+1}}{(k+1)!}=\frac{(-1)^2}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{(-1)^k}{k!}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)$

即 $\frac{a_{k+1}}{(k+1)!}=\frac{(-1)^2}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{(-1)^k}{k!}+\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}$

$$\therefore a_{k+1}=(k+1)!\left(\frac{(-1)^2}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^k}{k!}+\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\right)$$

即若 $n\leq k$ $(k\geq 3)$ 时， $a_n=n!\left(\frac{(-1)^2}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}+\frac{(-1)^4}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}\right)$ 成立，则 $n=k+1$ 时，该命题亦成立。

综合 i ii，由数学归纳法原理知，$\forall n\geq 2$，$a_n=n!\left(\frac{(-1)^2}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}+\frac{(-1)^4}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}\right)$

在获得通项公式后，我们发现这一式子不够简洁，于是开始了对这一式子的简化。

五．通过麦克劳林公式简化通项公式：

在思考如何将$a_n = n!\left(\frac{(-1)^2}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}+\frac{(-1)^4}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}\right)$即求和形式加以简化时，由这一式子的型式联想到了麦克劳林公式，于是尝试反向利用麦克劳林公式进行简化：

由$f(x)=e^x$的麦克劳林公式展开式：

$$f(x)=e^x=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)，\ \theta\in(0,1)$$

即$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$，$\theta\in(0,1)$

与$a_n = n!\left(\frac{(-1)^2}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}+\frac{(-1)^4}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}\right)$对比

则令$x=-1$

$$\therefore e^{-1}=1+\frac{-1}{1!}+\frac{(-1)^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-\theta}，\ \theta\in(0,1)$$

$$\therefore e^{-1}=\frac{(-1)^2}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}+\frac{(-1)^4}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-\theta}，\ \theta\in(0,1)$$

$$\therefore a_n=n!\left(e^{-1}-\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-\theta}\right)，\ \theta\in(0,1)$$

$$\therefore a_n=\frac{n!}{e}+\frac{(-1)^n}{(n+1)e^{\theta}}，\ \theta\in(0,1)$$

但是其中的θ为一个不取决于 n 的参量，无法消去。

可$\because \theta\in(0,1)$

$$\therefore \frac{1}{(n+1)e^{\theta}}\in\left(\frac{1}{e(n+1)},\frac{1}{n+1}\right)\in(0,1)$$

又由题设可知，$a_n\in N^*$，而$\frac{(-1)^n}{(n+1)e^{\theta}}$恰为小误差，不影响整数部分，故可用取整函数来解决这个问题。

$\therefore$分奇偶性讨论：

$$a_n=\begin{cases}\left[\dfrac{n!}{e}\right], & n\text{为奇数}\\ \left[\dfrac{n!}{e}\right]+1, & n\text{为偶数}\end{cases}$$

即 $a_n=\left[\dfrac{n!}{e}\right]+1+2\left[\dfrac{n}{2}\right]-n$

这个式子依然不够简洁，我们决定进一步简化。所以仍从 $a_n=\dfrac{n!}{e}+\dfrac{(-1)^n}{(n+1)e^{\theta}}$，$\theta\in(0,1)$ 出发，试图只使用一次取整函数得到结果。

再次考虑 $\dfrac{(-1)^n}{(n+1)e^{\theta}}$ 的范围：

$\because \theta\in(0,1)$，$(n\geq 2)$

$\therefore \dfrac{1}{e^{\theta}}\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$，$\dfrac{1}{n+1}\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right]$

$\therefore \dfrac{(-1)^n}{(n+1)e^{\theta}}\in\left[-\dfrac{1}{3},0\right)\cup\left(0,\dfrac{1}{3}\right]$

若取 $p\in\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$

则 $\dfrac{(-1)^n}{(n+1)e^{\theta}}+p\in\left[p-\dfrac{1}{3},p\right)\cup\left(p,p+\dfrac{1}{3}\right]\in[0,1)$

又 $\dfrac{n!}{e}=a_n+\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)e^{\theta}}$，$a_n\in N^*$

$\therefore \left[\dfrac{n!}{e}+p\right]=\left[a_n+\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)e^{\theta}}+p\right]=a_n$

即 $a_n=\left[\frac{n!}{e}+p\right]$，$(n\geq 2)$， $p\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

又 $\frac{1}{e}\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，为简化式子不妨取 $p=e$

则 $a_n=\left[\frac{n!+1}{e}\right]$

六．我们对欧拉对这一问题的研究的理解：

对于 n 个数，设其错排方法数为 a_n。

若对于重排后的数列进行逐一检验，可将未错排的情况分为以下 n 种：

1.检验第一个数就是“1”，即已经有数在原来位置，这种情况下，无论后续的数是何种排列情况，都已经不满足错排的条件，该种情况数记为 $b_{(n,1)}$

2.检验第一个数不是“1”，继续检验，检验到第二个数发现是“2”，已不满足错排条件，该种情况数记为 $b_{(n,2)}$

……

m.检验前 m-1 个数都是不在原来位置的数，继续检验第 m 个数发现恰为“m”，该种情况数记为 $b_{(n,m)}$

……

n.检验前 n-1 个数都不在原来位置，继续检验第 n 个数发现恰为“n”，该种情况数记为 $b_{(n,n)}$

又 n 个数重排的方法数为 $n!$

则错排数 $a_n = n! - \left(b_{(n,1)} + b_{(n,2)} + \cdots + b_{(n,n)}\right)$

显然，$b_{(n,1)} = (n-1)!$

现讨论 n+1 个数的情况：

显然，n+1 个数重排的方法数为 $(n+1)!$

$$b_{(n+1,1)} = n!$$

对于 $b_{(n+1,2)}$，可以考虑为只要求“2”在原来位置，而其他数没有限制条件的方法数 $n!$ 减去了“2”在原来位置且“2”之前出现过某个数在原来位置的情况数。

而计算“2”在原来位置且“2”之前出现过某个数即“1”在原来位置的情况数即为（n-1）!，此情况可看作 n 个数随机排列时第一个数就是“1”的情况，故情况数为 $b_{(n,1)}$

即 $b_{(n+1,2)} = n! - b_{(n,1)}$

同理，对于 $b_{(n+1,3)}$，可看作“3”未重排，即不计“3”的 n 个数重排中，无限制的情况数 $n!$ 减去“1”和“2”在原来位置的情况数。而这个被减去的情况数可看做 n 个数重排中检验第一个数就为“1”的情况数和直到检验到第二个数才是“2”的情况数之和。即 $b_{(n,1)} + b_{(n,2)}$

$\therefore b_{(n+1,3)} = n! - \left(b_{(n,1)} + b_{(n,2)}\right)$

即 $b_{(n+1,3)} = b_{(n+1,2)} - b_{(n,2)}$

依此类推，对于 $b_{(n+1,m)}$ 可看作即不计“m”的 n 个数重排中，无限制的情况数 $n!$ 减去原前 m-1 个数

在原来位置的情况数，而这个被减去的情况数可看做 n 个数重排中检验第一个数就为“1”的情况数加上直到检验到第二个数才是“2”的情况数加上……一直加到直到检验到第 m-1 个数才是原来的数“m-1”。

即 $b_{(n,1)}+b_{(n,2)}+\ldots+b_{(n,m-)}$

$$\therefore b_{(n+1,m)}=n!-\left(b_{(n,1)}+b_{(n,2)}+\ldots+b_{(n,m-1)}\right)$$

即 $b_{(n+1,m)}=b_{(n+1,m-1)}-b_{(n,m-1)}$

由此，可得下表：

$$b_{(n+1,1)}=n!$$

$$b_{(n+1,2)}=b_{(n+1,1)}-b_{(n,1)}$$

$$b_{(n+1,3)}=b_{(n+1,2)}-b_{(n,2)}$$

……

$$b_{(n+1,m)}=b_{(n+1,m-1)}-b_{(n,m-1)}$$

……

$$b_{(n+1,n+1)}=b_{(n+1,n)}-b_{(n,n)}$$

所以

$$\frac{b_{(n,1)}}{n!}=\frac{(n-1)!}{n!}$$

$$\frac{b_{(n,2)}}{n!}=\frac{b_{(n,1)}}{n!}-\frac{b_{(n-1,1)}}{n!}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n(n-1)}$$

$$\frac{b_{(n,3)}}{n!}=\frac{b_{(n,2)}}{n!}-\frac{b_{(n-1,2)}}{n!}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n(n-1)}-\left(\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{(n-1)(n-2)}\right)$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{2}{n(n-1)}+\frac{1}{(n-1)(n-2)}$$

同理，$\frac{b_{(n,4)}}{n!}=\frac{b_{(n,3)}}{n!}-\frac{b_{(n-1,3)}}{n!}=\frac{1}{n}-\frac{3}{n(n-1)}+\frac{3}{(n-1)(n-2)}-\frac{1}{(n-2)(n-3)}$

发现，分子呈现帕斯卡三角形的分布。

……

即 $b_{(n,1)}=C_0^0(-1)^0(n-1)!$

$$b_{(n,2)} = C_1^0(-1)^0(n-1)! + C_1^1(-1)^1(n-2)!$$

$$b_{(n,3)} = C_2^0(-1)^0(n-1)! + C_2^1(-1)^1(n-2)! + C_2^2(-1)^2(n-3)!$$

……

$$\therefore b_{(n,m)} = \sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^i(-1)^i(n-i-1)!$$

……

$$b_{(n,n)} = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i(-1)^i(n-i-1)!$$

求和：

$$\sum_{i=1}^{n} b_{(n,i)} = \sum_{i=0}^{n-1}\left((-1)^i(n-i-1)!\sum_{k=i}^{n-1} C_k^i\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left((-1)^i(n-i-1)!\,C_n^{i+1}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left((-1)^i(n-i-1)!\frac{n!}{(n-i-1)!(i+1)!}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left((-1)^i\frac{n!}{(i+1)!}\right)$$

$$= n!\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{(-1)^i}{(i+1)!}\right)$$

又 $a_n = n! - \sum_{i=1}^{n} b_{(n,i)}$

$$\therefore a_n = n!\left(1-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i}{(i+1)!}\right)$$

$$a_n = n!\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}\right)$$

即 $a_n = n!\sum_{i=2}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}$

七．推广

（一）求 n 个元素中，r 个错排的方法数：

显然，该问题可分步解决：

S_1：考虑哪 r 个元素是错排：$m_1 = C_n^r$

S_2：这 r 个元素错排和另 n-r 个元素不变的方法数：$m_2 = a_r = \left[\frac{r!+1}{e}\right]$

综合 S_1 S_2：该推广情况的方法数为 $C_n^r\left[\frac{r!+1}{e}\right]$

（二）求 n 个元素中，已经有其中 s 个错排，且这 s 个元素并非在原集合中：

这个问题等价于在原 n 个原 n 个元素中挑出 s 个元素，将其替换成原来 n 个元素所成的集合之外的另 s 个元素，再进行重新排列，由于新的 s 个元素在原来的有序排列中每有对应的元素，则错排条件可退化成只要求“挑剩下的”n-s 个元素不在其原来位置即可。

S_1：考虑原来的元素集合中是哪 s 个元素被替换，方法数 $m_1 = C_n^s$

S_2：考虑挑剩下的 n-s 个元素排在 1 到 n 号位置，要求这 n-s 个元素中各个元素都不在其他位置：

这时将该步骤分离出来考虑：设 m 个元素排到 n 个空上的错排上的数目为 S_n^m

为表述方便，设 1 号位置为Ⅰ区，2……m 号位置为Ⅱ区，m+1……n 号位置为Ⅲ区。

则对于元素“1”讨论：

⑴“1”在Ⅲ区，可能数位 n-m

而此情况下，对于剩下的 m-1 个元素，1 号位置与Ⅲ区的各个位置一样都是错排条件所允许的位置。此时对于“1”已固定的情况，错排数即为 S_{n-1}^{m-1}

所以情况⑴的错排数为 $(n-m)S_{n-1}^{m-1}$

⑵“1”在Ⅱ区，可能数位 m-1，不妨设其位于 k 号位

则此情况下设错排数为 B_n^m，则对于 B_n^m 的统计可按元素“k”的位置分三类情况讨论：

①“k”位于 1 号位置，则此情况即“1”与“k”互换，不影响其他元素，错排数为 S_{n-2}^{m-2}

②“k”位于Ⅲ区，可能情况有 n-m 种，而对于固定在Ⅲ区的“k”，其所占的某个位置对于剩下的 m-2 个元素来说和 1 号位置是一样的,所以对这种情况事实上与情况①是一样的,也是 S_{n-2}^{m-2}。

所以情况②的错排数为 $(n-m)S_{n-2}^{m-2}$

③“k”位于Ⅱ区，可能情况有 m-2 种，而对于固定在Ⅱ区的“k”，其所占的某个位置（不妨设为 g 号位置）可在一定程度上看作是由元素“1”所占据，这种情况与没有元素“k”，没有 k 号位置，而元素“1”占据 g 号位置的情况相同，又由于 g 的任意性，该情况下的情况数即为 B_{n-1}^{m-1}。

所以情况③的错排数为$(m-2)B_{n-1}^{m-1}$

$$\therefore\ B_n^m=(n-m+1)S_{n-2}^{m-2}+(m-2)B_{n-1}^{m-1}$$

综上，$S_n^m=(n-m)S_{n-1}^{m-1}+(m-1)B_n^m$

$$S_n^m=(n-m)S_{n-1}^{m-1}+(m-1)(n-m+1)S_{n-2}^{m-2}+(m-1)(m-2)B_{n-1}^{m-1}$$

$$S_n^m=(n-m)S_{n-1}^{m-1}+(m-1)(n-m+1)S_{n-2}^{m-2}+(m-1)(m-2)(n-m+1)S_{n-3}^{m-3}+(m-1)(m-2)(m-3)B_{n-2}^{m-2}$$

$$S_n^m=(n-m+1)\left(A_{m-1}^0S_{n-1}^{m-1}+A_{m-1}^1S_{n-2}^{m-2}+A_{m-1}^2S_{n-3}^{m-3}\right)-A_{m-1}^0S_{n-1}^{m-1}+A_{m-1}^3B_{n-2}^{m-2}$$

$$S_n^m=(n-m+1)\left(A_{m-1}^0S_{n-1}^{m-1}+A_{m-1}^1S_{n-2}^{m-2}+A_{m-1}^2S_{n-3}^{m-3}+A_{m-1}^3S_{n-4}^{m-4}\right)-A_{m-1}^0S_{n-1}^{m-1}+A_{m-1}^4B_{n-3}^{m-3}$$

……

通过迭代，得到

$$S_n^m=(n-m+1)\sum_{i=1}^{m-1}A_{m-1}^{i-1}S_{n-i}^{m-i}-A_{m-1}^0S_{n-1}^{m-1}+A_{m-1}^{m-1}B_{n-m+2}^2$$

又由定义易得：$B_{n-m+2}^2=n-m+1$，$S_{n-m+1}^1=n-m+1$

$$S_{n-1}^{m-1}=(n-m+1)\sum_{i=1}^{m-2}A_{m-2}^{i-1}S_{n-1-i}^{m-1-i}-A_{m-2}^0S_{n-2}^{m-2}+A_{m-2}^{m-2}B_{n-m+2}^2$$

而这里，我们只研究到一个算法，并没有得出一个公式性的结论。

S_3：将新替换的 s 个元素填入剩下的 s 个空位之中，方法数：$m_3=s!$

综上，推广三的错排数为$C_n^sS_n^{n-s}s!$，其中S_n^{n-s}由叠加算得，如可通过计算机循环算法解得。

参考文献

[1]Ed Sandifer，How Euler Did It , 11 Derangements。

[2] 卢开澄 卢华明，组合数学（第 3 版），清华大学出版社, (2002)。

[3] 孙淑玲 许胤龙，组合数学引论，中国科技大学出版社, (1999)